

1 Пределы

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 2x - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = 1$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin wx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{wx + \bar{o}(wx)}{x} = w$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + 0.5x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1+x+0.25x^2)}{x^2(1+0.5x+\sqrt{1+x})} = -\frac{1}{8}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{2x^2 + 1} = 0.5$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow a} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow a} \frac{yx + \bar{o}(yx)}{x} = a$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-3} = -1$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x^{-1} = 0$$

произведение ограниченной на бесконечно малую

9.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n^2} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = 0$$

2 Сходимость

2.1 Ряды

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

доказательство через отрицание критерия Коши

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

(a) Обычная сходимость:

$$\sum_{i=1}^N \sin n = \frac{1}{\sin 0.5} \sin 0.5 \cdot \sum_{i=1}^N \sin n = \frac{1}{\sin 0.5} (\cos 0.5 - \cos 1.5 + \cos 1.5 - \dots - \cos(n+0.5))$$

Таким образом воспользовавшись признаком Дирихле получаем сходимость ряда.

(b) Абсолютная сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2n}{2n}$$

Получим разность расходящегося и сходящегося рядом. Т.о. расходуется.

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

по признаку Дирихле сходится в обычном смысле и расходится в абсолютном.

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

По интегральному признаку получаем, что сходится при $\alpha > 1$. Иначе расходится.

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^{-1}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

расходится

6.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}$$

интегральный признак

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \ln(\ln(x))} = \int_{10}^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln(\ln(x))} = \int_{10}^{\infty} \frac{dz}{\ln z}$$

А это расходится.

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

сходится по Даламберу или по Коши

8.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$$

интегральный признак $\Rightarrow$ замена $\ln x$ на z получаем сходимость при $\alpha > 1$

9.

$$\sum_{n=1} n^2 z^{n^2}$$

Радиус сходимости¹:

(a) $|z| \geq 1$ расходится

(b) $|z| < 1$. $n^2 z^{n^2} < n^2 z^n$, а этот ряд сходится абсолютно по признаку Даламбера, а значит и просто сходится

10.

$$\sum_{n=1} \frac{\ln n}{\ln \ln n}$$

$\ln \ln n < \ln n$ значит члены ряда больше 1, значит расходится

11.

$$\sum_{n=1} \frac{1}{\ln^p n}$$

расходится так, как больше гармонического начиная с некоторого члена

3 Интегралы

3.1 Неопределенный

1.

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \tan x - x + C$$

2.

$$\int \cos^3 x dx = \int 0.25(3 \cos x + \cos 3x) dx = 0.25(3 \sin x + 1/3 \sin 3x) + C$$

¹Под z имеется ввиду комплексная переменная

3.

$$\int (3x+1)^3 dx = \frac{1}{12}(3x+1)^4 + C$$

4.

$$\int \ln(1/x)^5 dx = - \int t^5 e^t dt = -e^t(t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120) + C, t = \ln x$$

5.

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + 0.5 \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

3.2 Определенный

1.

$$\int_{x^2+y^2=1} x^2 dy + xy dx$$

$$x = \cos t, y = \sin t \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^3 t - \sin^2 t \cos t dt = 0$$

2.

4 Диффуры

1.

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, -1, 1$
Решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x$

2.

$$y''' + 4y'' - 2y' - 8y = 0$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -4, -\pm\sqrt{2}$
Решение: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 e^{\sqrt{2}x}$

3.

$$x^2 y dx - (x+5) dy = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2 dx}{x+5} \Rightarrow \ln y = (0.5x^2 - 5x) + 25 \ln |x+5| + c$$

$$y = C(x+5)^{25} e^{(0.5x^2 - 5x)}$$

4.

$$\ddot{x} + x = \sin t$$

Решение однородного $C_1 \sin t + C_2 \cos t = y$, затем либо вариацией постоянных, либо методом хз как называется для правой части из синусов и многочленов (см Филиппова) получим решение: $C_1 \sin t + C_2 \cos t + 0.5t \cos t$

5.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 1$$

Решение однородного: $C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$. частное решение — 1

5 Разное

1.

$$A^2$$

имеет собственный вектор. пространство комплексное гильбертово. доказать, что существует собственный вектор y у A

$$(A^2 - \lambda I)x = 0 \Rightarrow (A - \sqrt{\lambda}I) \underbrace{(A + \sqrt{\lambda}I)x}_y$$

2. Случайная величина не имеющая матожидание - $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ - распределение коши

3. Случайная величина имеющая матожидание, но не имеющая дисперсии - $f(x) = \frac{2}{x^3}$ тут можно более умные примеры, но мне этот нравится

4. При каких условиях $P(x) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} x^{n-1}$ является характеристическим многочленом некоторого оператора. Ответ: $n \geq 1, a_0 = (-1)^n$